TYPY ÚVAH V PROCESU TVORBY MATEMATICKÝCH ÚLOH PRO NADANÉ ŽÁKY

Eva Semerádová

Abstrakt

Článek má dva cíle. Jedním z nich je seznámit čtenáře s výsledky výzkumu týkajícího se toho, jak tvůrce úlohy uvažuje při jejím vytváření. Představeny budou úvahy typu pokus – omyl, úvahy s částečným vědomím následku a úvahy s plným vědomím následku. Vzhledem k těmto úvahám budou demonstrovány rozdíly mezi různě zkušenými tvůrci úloh. Hlavním výsledkem výzkumu je zjištění, že s rostoucí zkušeností tvůrce stoupá pravděpodobnost výskytu úvahy s plným vědomím následku.

Druhým cílem je seznámit čtenáře (a to hlavně takové, kteří o tvorbě matematických úloh nemají představu) s tím, jak taková matematická úloha – třeba do soutěží pro nadané žáky – vznikne. Vše si ukážeme na příkladu tvorby úlohy člena Úlohové komise Matematické olympiády. Úvahy jsou popsané tak, aby byly v hlavních rysech srozumitelné i čtenáři, který matematice příliš nerozumí. V příloze jsou pak uvedena plná znění a řešení v textu zmiňovaných úloh.

Klíčová slova: *Tvorba úloh, úlohy pro matematické soutěže, úvahy typu pokus – omyl, úvahy s částečným vědomím následku, úvahy s plným vědomím následku.*

Idea Types in the Process of Posing Mathematical Problems for Gifted Pupils

Abstract

There are two aims of the article: The first one is to present research results regarding the idea types during problem posing. There are three idea types shown here: Trial error ideas, semi-intentional ideas and intentional ideas. The ideas will be used as a framework to show the differences between the problem authors on various experience levels. The main result is that the more experienced the author is, the intentional idea is more probable to appear.

The second aim is to show to the readers (especially them who do not deal with Mathematics and Mathematical problems) with the process leading to the new Mathematical problem. All will be shown on the case of the member of Mathematical Olympiad Problem Authors team. His ideas are described in the way for the readers to be understandable despite not being professional in Mathematics. The Appendix presents the problems discussed in the article supplied with their solution.

Keywords: *Problem posing, Mathematical competition problems, trial – error, semi-intentional ideas, intentional ideas.*

Úvod

Základním nástrojem, jak pracovat s matematicky nadanými žáky, jsou náročné matematické úlohy. Ač to na první pohled může vypadat jinak, vytváření nových úloh je nutné stále. Nad potřebou nových náročných a netradičních úloh se zamýšlí např. Zhouf (2010): Velkým odběratelem takových úloh jsou matematické soutěže. U nich je právě novost úlohy vysoce důležitým prvkem. Kdyby byly úlohy odněkud převzaté, nespravedlivě bychom zvýhodňovali ty řešitele, kteří na danou úlohu již třeba naprostou náhodou narazili. Ale nové úlohy jsou potřeba nejen do nových kol soutěží a nových učebnic. Vyvíjí se doba, vyvíjí se společnost, vyvíjí se didaktika atd. A taky každý žák je jiný. Někdy je prostě potřeba vytvářet nové úlohy konkrétnímu žákovi nebo konkrétní situaci na míru.

Zdůrazněme nyní, že celou dobu mluvíme o tvorbě náročných úloh, většinou slovních. Takových, jejichž řešení od žáka vyžaduje přemýšlení, u kterých není vidět způsob řešení na první pohled, které jsou školsky netypické. Odborná veřejnost pracující s nadanými žáky pokládá za znaky kvalitní úlohy hlavně její matematické charakteristiky. Např. nerutinnost, řešitelnost více způsoby, potenciál k dalšímu zkoumání aj. Oproti tomu pedagogové nepracující výhradně s nadanými žáky kladou větší důraz na interakci úlohy s žákem (Patáková, 2013).

Proces tvorby náročných úloh se zajisté liší od situace, kdy potřebujeme vytvořit běžnou procvičovací úlohu. Druhý případ je poměrně rutinní práce. Situace je přitom velice sevřená tím, že přesně známe cílovou skupinu žáků, konkrétní cíle práce s úlohou, konkrétní obtížnost atp. Tvoříme-li náročnou úlohu, máme daleko větší volnost. A to s jejími pozitivními i negativními důsledky. Uplatňujeme kreativitu, nakládáme s tématy způsobem, který se nám líbí. Tvůrci úloh do soutěží mnohdy pracují tak, že si pohrávají s nápadem, dotvoří jej v konzistentní úlohu a teprve poté rozhodnou, pro jakou věkovou skupinu je získaná úloha vhodná. Je to tedy úplně opačná situace, než když tvoříme úlohu s cílem např. „procvičit základní užití Pythagorovy věty ve slovní úloze pro osmáky tak, aby to zvládli i „čtyřkaři“. Volnost práce ale znamená i to, že tvůrce sám musí hledat, objevovat, přemýšlet, zavrhovat málo nosné nápady – při tvorbě soutěžních úloh se prostě nemůžeme spolehnout na nějaké vodítko, které by nám práci usnadnilo.

Zajímavé je srovnat, jakým způsobem ke tvoření úloh přistupují profesionálové a jakým začínající tvůrci. Rozdílů je možné identifikovat mnoho. My se v článku zaměříme na dva nejvýraznější – lineární a cyklický model nadání a rozdíly v typech úvah.

Teoretická východiska

Akay a Boz (2009) se zabývali hledáním příčin, proč je tvorba úloh pro začátečníky v oboru náročná. Jedná se o tyto čtyři skupiny problémů:

- *Obtíže vyvstávající z podstaty činnosti tvorby úloh*
  Jak je uvedeno výše, tvůrce má volnou ruku – není svázaný žádným daným postupem práce. Proto ale může mít začátečník problém např. již s tím, že neví, odkud začít, že si neumí určit dílčí kroky práce, že neumí zformulovat vymyšlenou úlohu, aby byla srozumitelná ostatním, …
- *Obtíže vyvolané osobou začínajícího tvůrce*
  Začínající tvůrce např. není dostatečně kreativní, dostatečně sebevědomý, aby se pouštěl do zkoumání neznámých matematických situací, nemá dostatečnou představivost, …
- *Nedostatky v matematických znalostech*
  Je zřejmé, že ten, kdo tématu sám dostatečně a v širokých souvislostech nerozumí, nemůže v něm ani tvořit kvalitní úlohy.
- *Obtíže plynoucí ze zvyků a neochoty opouštět známé*
  Začátečník může mít problém začít myslet jiným způsobem, než byl zvyklý. Shriki (2010) uvádí na základě výzkumů se studenty pedagogických fakult, že nováčci ve tvorbě úloh přitom cítí větší uspokojení z opačného procesu – z toho, že úlohu vyřeší, než z toho, když nějakou vytvoří.

Tvorbu úloh začátečníků a zkušených tvůrců srovnávali Pelczer a Gamboa (2009). Ti vyvinuli *lineární a cyklický model tvorby úloh*. V jejich pojetí jsou začátečníky středoškolští studenti a studenti prvního ročníku vysoké školy, zkušenými tvůrci vysoce úspěšní řešitelé matematické olympiády a učitelé matematiky.

V modelu operují s pěti stadii, přičemž v průběhu tvorby se nemusí vyskytnout každé stadium, některá se zase vyskytují opakovaně:

- *Nastavení* znamená např. určení tématu, rozmyšlení výchozího bodu, rozmyšlení podstatných charakteristik aj.
- *Transformace* znamená analýzu již hotového a provedení potřebných změn.
- *Formulace* je nalezení vhodné otázky, její zasazení do kontextu, zformulování úlohy apod.
- *Hodnocení* znamená zhodnocení dílčích částí úlohy i úlohy celé.
- *Závěrečné zhodnocení* je fází zpětného ohlédnutí za procesem tvorby (popř. poučení z něj), zhodnocení úlohy jako celku vzhledem k její zajímavosti, kvalitě.

Začátečníci obvykle tvořili úlohy lineárním způsobem. Běžná je např. trajektorie Nastavení – Formulace – Hodnocení, což znamená, že autor vymyslí námět, zformuluje k němu otázku a pak ji přijme, nebo zavrhne. V lineárním způsobu tvorby obvykle nejsou přítomna všechna stadia, většinou chybí transformace. Začátečník často rozvede nápad, a pokud zjistí, že se mu úloha vzniklá z prvotního nápadu nelíbí, není schopný ji upravit. Spíše nápad opustí a hledá jiný. Práce je spíše orientovaná náhodně.
Zkušení tvůrci pracují většinou cyklicky. Podle potřeby se vracejí k jednotlivým stadiím, provádějí transformace. Dokáží se poučit z neúspěchu. Mají svou představu kvalitní úlohy a cyklicky se vracejí mezi stádii tak dlouho, dokud nejsou s výslednou úlohou úplně spokojeni. Mnohdy je (na rozdíl od začátečníků) přítomné i stadium závěrečného zhodnocení.

Nyní se podíváme na další významný rozdíl v přístupu různě zkušených tvůrců úloh, a to v typech úvah.

Metodologie

Prezentovaná práce je jedním z výsledků mého širšího výzkumu hledajícího rozdíly ve tvorbě úloh různě zkušených tvůrců. Pro potřeby výzkumu byly vytvořeny tři kategorie tvůrců s různou úrovní zkušeností s tvořením úloh:

- *Začátečníci* žádnou zkušenost s tvorbou úloh nemají. Nejedná se však o úplně laickou veřejnost, protože mají dostatečné matematické znalosti a znají matematické soutěže. (Výzkumný vzorek tvořili studenti posledních dvou ročníků učitelství matematiky na Pedagogické fakultě UK, kteří ale nikdy nebyli zapojeni do akcí spojených s tvořením úloh.)
- *Odborníci* mají bohaté zkušenosti s úlohami a jejich předkládáním žákům, občas sami také nějakou úlohu vytvoří, ale ne víc, než vyžaduje běžná učitelská činnost. (Výzkumný vzorek tvoří učitelé, kteří nikdy nikde nepublikovali vlastní úlohy.)
- *Experti* tvoří úlohy profesionálně. (Jedná se o členy úlohových komisí soutěží, autory učebnic apod.)

Porovnáme-li předložené kategorie s členěním využívaným pro lineární a cyklický model tvorby (Pelczer a Gamboa, 2009), přibývá kategorie expertů. V pojetí lineárního a cyklického modelu je zkušený tvůrce opakem začátečníka. Jejich kategorie zkušený tvůrce by tedy odpovídala sloučení našich kategorií odborník a expert. Ve výzkumu lineárního a cyklického modelu se ale žádní experti nevyskytují, zkušené tvůrce zastupují pouze odborníci. Z výše uvedeného pro nás plyne očekávání, že u začátečníků bude převažovat lineární model tvorby, u odborníků i expertů model cyklický.

Výzkumnou otázkou bylo: *Jak se liší proces tvorby úloh s rostoucím množstvím zkušeností s tvorbou (tedy v řadě začátečník – odborník – expert)?*

Na základě předvýzkumů založených na volném pozorování tvůrců úloh byly vytipovány dále uváděné tři typy úvah jako oblast s potenciálem k odhalení rozdílů mezi různě zkušenými tvůrci úloh. Dále byly prováděny předexperimenty s dotazníky, kdy tvůrci sami posuzovali míru uvědomění důsledku jednotlivých úvah. Subjektivita takových posouzení se však ukázala jako obrovský problém, takže v rámci hlavního výzkumu jsem přistoupila k analýze sebereflexí tvorby.

Sebereflexí je v tomto výzkumu míněn podrobný popis všech (i zdánlivě bezvýznamných a k cíli nevedoucích) úvah během procesu tvorby úlohy. Účastníci byli vyzváni, aby vytvořili náročnou a originální úlohu, kterou by bylo možné využít do matematické soutěže s otevřenými úlohami (tj. bez výběru odpovědí). Věkové rozmezí cílové skupiny žáků bylo zadáno pro devátý ročník základní školy (či samozřejmě také odpovídající ročník víceletých gymnázií) nebo pro první ročník škol středních. Důvod pro dané rozmezí je čistě praktický. Situace bez omezení by nebyla pro výzkum vhodná – tvorba úlohy např. pro pátý ročník základní školy versus maturitní ročník školy střední by z principu musela vykazovat různé znaky. Přelom základní a střední školy byl vhodný proto, že bylo možné využít respondenty ze základních i středních škol a z úlohových komisí základoškolských i středoškolských soutěží.

Účastníci měli za úkol vytvořit požadovanou úlohu a k ní sepsat podrobnou sebereflexi tvorby. Spolu s úlohou bylo požadováno autorské řešení, aby bylo zajištěno, že odevzdány budou úlohy opravdu dotažené do konce. Úlohu tvořili účastníci doma, bez časového nebo jiného omezení. Nebylo ani nutné práci provést najednou. Jediný pokyn týkající se času byl, že sebereflexi musí sepisovat přímo v průběhu tvorby nebo bezprostředně po ní, dokud si vše podrobně pamatují. Zpětným dotazováním bylo zjištěno, že vypracování úkolu nejrychlejšímu účastníkovi trvalo 40 minut, nejpomalejšímu 8 hodin. Celou práci měli účastníci odevzdat nejpozději měsíc od obdržení zadání. Termín ale nebyl přísný, pokud někdo požádal o prodloužení limitu, bylo mu vyhověno. Respondenti věděli, že se účastní výzkumu zaměřeného na proces tvorby úloh. Nevěděli však, že výsledkem bude srovnání různě zkušených tvůrců.

Vlastní výzkum měl 75 účastníků: 23 začátečníků, 27 odborníků a 25 expertů. Analyzovány byly sebereflexe tvorby úlohy, a to pomocí softwaru Atlas.ti. Metodologie sice byla odvozená ze zakotvené teorie, takto však byly zpracovávány spíše předvýzkumy. Ve vlastní výzkumné části týkající se typů úvah již byly pouze kódovány kategorie vytipované předvýzkumem.

Výzkumný vzorek kategorie začátečníků tvořili studenti učitelství matematiky pedagogické fakulty, kde jsem vedla seminář zaměřený na práci s matematickými talenty a splnění úkolu po nich požadovala povinně jako jednu z podmínek získání zápočtu. Skupiny odborníků a expertů, aby vůbec bylo možné dostatečný počet respondentů získat, musely být za práci finančně odměněny, i když někteří by se pravděpodobně zúčastnili i bez této motivace. Skupinu odborníků tvořili učitelé základních i středních škol. Přitom skupinu středoškolských učitelů tvořili převážně učitelé gymnázií, kteří by měli mít s náročnými matematickými úlohami bohaté zkušenosti. Jako experti byli osloveni členové úlohových komisí větších matematických soutěží pořádaných v ČR a několik autorů středoškolských učebnic.

Jako zajímavost ještě uvedu, že podíl účastníků výzkumu oproti všem osloveným osobám byl překvapivě podstatně vyšší v kategorii expertů než v kategorii odborníků. Očekávání bylo, že bude spíše problém získat experty, kterých je v republice poměrně málo a kteří většinou bývají časově přetížení. Předpokládám, že důvod tkví v tom, že od expertů byla požadována činnost, ve které se cítí sebejistě. Učitel bez zkušenosti v tvoření úloh, který má však zároveň pocit, že by se měl projevit jako schopný, se účasti často trochu obával. Z tohoto stavu plyne jisté omezení interpretace výsledků výzkumu – nemůžeme si pod pojmem odborník představit průměrného běžného učitele, protože ti, kteří se činnosti obávali, se výzkumu nezúčastnili. Pro náš výzkum se však nejedná o žádný problém. Cílem nebylo prozkoumat, jak tvoří úlohy „typický učitel“. Cílem bylo zjistit, jak se mění přístup k tvoření úloh se vzrůstajícím množstvím zkušeností tvůrce. A učitele ochotné zapojit se do výzkumu můžeme beze všech pochybností zařadit jako skupinu stojící množstvím zkušeností s tvorbou úloh mezi skupinami začátečníků a expertů.

Typy úvah

Jedním z výstupů výzkumu bylo stanovení tří typů úvah v procesu tvorby:

- *Úvahy typu pokus – omyl*

  Jedná se o situace, kdy tvůrce má nápad, ale ten není vztažen k nějakému konkrétnímu cíli a tvůrce nemá očekávání, kam nápad povede. Náhodně zkouší různé možnosti, různé situace, různá čísla apod. Přitom je šance, že úvaha se ukáže jako dobrá a bude se dále rozvíjet, stejně tak je ale možné, že nebude k ničemu. Např.:

  „Namaloval jsem rovnoběžník a rozdělil jej úhlopříčkami. Díval jsem se, jestli by mě k obrázku něco nenapadlo.“

  „Poklad budeme podle pravidel, která jsem vymyslel, dělit – řekněme třeba mezi dva loupežníky.“

- *Úvahy s částečným vědomím následku*

Takové úvahy jsou všechny, které nejsou ani pokus – omyl, ani s plným vědomím následku. Najdeme zde znaky obou dalších skupin. S úvahami s plným vědomím následku mají úvahy s částečným vědomím následku společné zakotvení v předchozí práci. Myšlenky nejsou úplně náhodné, vychází z očekávání, kam by autor chtěl rozpracovanou úlohu posunout. Zároveň však vykazují i charakteristiky typu pokus – omyl. Autor alespoň trochu tuší, co by s úlohou chtěl udělat, a nějakým způsobem to zkusí. Úprava stejně jako u úvah pokus – omyl může, ale nemusí vést k cíli. Obvykle se jedná o většinu úvah během tvorby. Např.:

„Zkusil jsem vypočítat obvody trojúhelníků, které dělením rovnoběžníku vznikly. Nenapadl mě ale žádný způsob, jak to udělat bez použití cosinové věty, takže to vhodné pro deváťáky není. Raději zkusíme počítat obsahy."

„Všechno na úloze zatím vypadá dobře, ale dělení pokladu mezi dva loupežníky je příliš snadné. Budeme poklad dělit třeba mezi patnáct loupežníků."

- *Úvahy s plným vědomím následku*

Tyto úvahy tvoří protipól úvahám pokus – omyl. Tvůrce naprosto přesně ví, čeho chce docílit, a ví také přesně, jak toho docílit může. Úvaha s plným vědomím následku je předem naplánovaná, nemůže se stát, že při jejím správném provedení nedojdeme k zamýšlenému cíli. Velmi často je spojena se zpětným výpočtem vhodných údajů do zadání úlohy. Např.:

„Počítání obsahů takto získaných trojúhelníků je triviální. Potřebuji změnit úkol tak, abychom využívali stejný výpočet, ale aby to nebylo tak vidět na první pohled. Potřebuji tedy jiné trojúhelníky, které by ale měly zachovanou jednu stranu a zachovaný obsah. Toho docílím tím, že posunu třetí vrchol trojúhelníku po rovnoběžce s protější stranou. Je jedno, o kolik cm ho posunu, výsledek zůstane vždy stejný. Tak řekněme o 1 cm, aby zadání vypadalo hezky."

„Kdybych dělil poklad mezi patnáct loupežníků, vyjde, že by si měli rozřezávat zlaté číše na části. To je hloupé. Jak to tedy je? Když počet loupežníků označím x, tak během řešení úlohy provádím následující výpočet: $\left(\frac{100}{6x}+20\right)\cdot 3=\frac{50}{x}+60$. Když chci, aby každý loupežník měl celý počet zlatých číší, musí být číslo 50 dělitelné počtem loupežníků. Tak jich bude 25."

Výsledky výzkumu

Potvrdilo se očekávání, že u začátečníků bude převažovat lineární model tvorby, u odborníků i expertů model cyklický.

Nejzřetelnější rozdíl v práci různých skupin respondentů se vyskytuje u úvah s plným vědomím následku. Ty se u expertů vyskytly v sedmi případech z pětadvaceti, u odborníků ve třech případech ze sedmadvaceti a u všech třiadvaceti začátečníků se nevyskytly žádné. Po přepočtu tedy vychází průměrně na jednoho účastníka u expertů 0,28 úvahy s plným vědomím následku, u odborníků to bylo 0,11 a u začátečníků 0 úvah s plným vědomím následku.

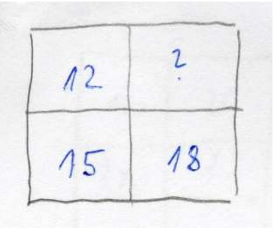
Úvahy typu pokus – omyl a úvahy s částečným vědomím následku se hojně vyskytují v práci všech tří skupin. Zajímavé je ale podívat se na úplný začátek práce na vytváření úlohy. První úvaha práce je vždy úvahou pokus – omyl (častěji) nebo úvahou s částečným vědomím následku. Úvahou typu pokus – omyl často začínají tvůrci ze všech tří skupin. Zkouší vymyslet vhodný kontext, volí konkrétní téma úlohy, kreslí obrázky, rozmýšlejí různé situace. Za zmínku však stojí práce začátečníků. Ti velmi často přichází s nápady, které pak rovnou zavrhují a hledají nápady jiné. Zdá se, že na rozdíl od ostatních skupin mají velmi slabou představu cílové úlohy. Náhodně zkouší různé kontexty. Pokud se jim rychle nepodaří najít jejich rozvinutí do zajímavé úlohy, nápad opouští a hledají jiný. Naopak experti, ač sami často začínají náhodnou úvahou pokus – omyl, jsou mnohem častěji schopni rozpracovat v úlohu hned první nápad. Ze začátečníků ve výzkumu 13 připouští, že opustili více než dva různé náměty, zatímco ve skupině odborníků to byli pouze 3 a expert, který by opustil více než dva různé náměty, se nevyskytl žádný. U expertů je dokonce někdy těžké rozhodnout, zda je jejich prvotní myšlenka typu pokus – omyl, nebo již myšlenka s částečným vědomím následku. Expert na rozdíl od začátečníka málokdy pracuje tak, že si nakreslí např. obrázek šestiúhelníku, jestli v něm náhodou neuvidí něco zajímavého. Expert většinou začíná takovým obrázkem, protože již tuší, že do něj bude chtít vpisovat útvary a počítat jejich obsah. Tyto úvahy jsem nakonec kódovala jako pokus – omyl, rozdíl v propracovanosti je ale zřejmý.

Ukázka – tvorba úlohy u Libora

Podívejme se nyní podrobně na jednu trajektorii tvorby náročné úlohy pro nadané žáky, konkrétně na úlohu, kterou vytvořil člen Úlohové komise Matematické olympiády Libor Šimůnek. Liborova činnost je komentována z hlediska typů úvah i z hlediska fáze tvorby v rámci lineárního a cyklického modelu tvorby autorů Pelczer a Gamboa (2009).

Pokud patříte mezi ty, kteří si s matematikou příliš nerozumí, nelekněte se. Úvahy jsou popsány tak, aby v hlavních obrysech byly srozumitelné i bez hlubšího vhledu do situace. Pokud naopak patříte do tábora matematiků, nezlobte se, že jsou v textu vynechány Liborovy propočty. Z hlediska typů úvah by nic nového nepřinesly, a pokud někoho z vás zajímají, jistě si je hravě doplníte sami.

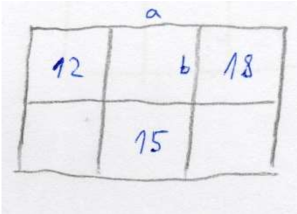
<table>
<tr><td>1.</td><td>Úvaha
Libor si vzpomněl na jednu svou starší úlohu:
Obdélník jsme rozdělili dvěma na sebe kolmými přímkami na čtyři menší obdélníky. Délka každé jejich strany je v centimetrech vyjádřena celým číslem. Obsahy tří z těchto čtyř menších obdélníků jsou 325, 375 a 405 centimetrů čtverečních. Vypočítejte délky stran původního obdélníku.
(Řešení úlohy – viz příloha.)

V zadání se nevyskytoval žádný náčrtek. Libor si podobnou situaci kreslí.


Zjišťuje, že náčrtkem by se úloha výrazně zjednodušila. (V úloze bez náčrtu totiž není zřejmé, která políčka spolu sousedí, řešitel musí zvažovat všechny možnosti.) Nicméně obrázek (kde již vynechal podmínku celočíselnosti délek stran) se mu líbí.

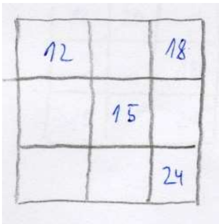
Typ úvahy</td></tr>
</table>

	Úvaha s částečným vědomím následku. Libor hledá inspirační zdroj, nachází jej ve své starší úloze. Má vizi, jak chce s námětem pracovat (odstranění celočíselnosti délek stran, využití obrázku jako námětu k rozvinutí v komplikovanější situaci). Námět může, a nemusí být nosný. Není to však slepé zkoušení, jistá vize zde je – Libor si je vědom potenciálu situace, má rovněž představu, kterým směrem se tvorba bude ubírat. ***Fáze tvorby*** Nastavení. ***Komentář*** Na první pohled se může zdát překvapivé, že expert začíná tvorbu nové soutěžní úlohy inspirací v úloze již existující. Člověku neznalému problematiky tvorby úloh to možná připadá jako opisování či kopírování již hotové práce. Uvidíte však sami, co se s námětem stane, k jak nesmírně rozdílné úloze během cesty Liborovými úvahami dospějeme. Inspirace již hotovou úlohou či jiným textem s matematickým obsahem je jednou ze čtyř možností, kterou jsem identifikovala jako výchozí bod, odkud může tvorba úlohy začít (Patáková, 2014). Dalšími výchozími body jsou matematické téma, prostředek k řešení a kontext. Frekvence zastoupení výchozího bodu inspirace známou úlohou klesá v řadě experti – odborníci – začátečníci. Důvod byl nastíněn již výše. Člověk bez zkušeností s tvorbou považuje tento způsob za něco nepřípustného, za prohřešek proti požadavku na originalitu úlohy. Zkušení tvůrci naopak vědí, že potřebují od něčeho vyjít. (Zkuste si sednout nad prázdným papírem s požadavkem „chci udělat jakoukoli úlohu". Jde to špatně.) Zároveň vědí, že hotovou úlohou se mohou inspirovat beze strachu o originalitu – existující úlohu vezmou opravdu jenom jako počátek, odkud se začnou odvíjet jejich myšlenky. Poté, co si s tématem dostatečně pohrají, získají zcela jinou úlohu postavenou na zcela jiném způsobu řešení. Stejně jako Libor, jehož úvodní námět je o hledání rozkladů na součin a jejich vhodném seskupování, kdežto nová úloha je poměrně náročný algebraický úkol s geometrickým kontextem.
2.	***Úvaha***

<table>
<tr><td></td><td>
Libor zkouší nakreslit obdélník 3 x 2 pole, náhodně vyplňuje některé obsahy a zkoumá, jestli je možné dopočítat obsahy všech polí.


Zjišťuje, že úloha má nekonečně mnoho řešení. Kdyby zadal další obsah, úloha by byla příliš snadná.

Typ úvahy
Pokus – omyl.

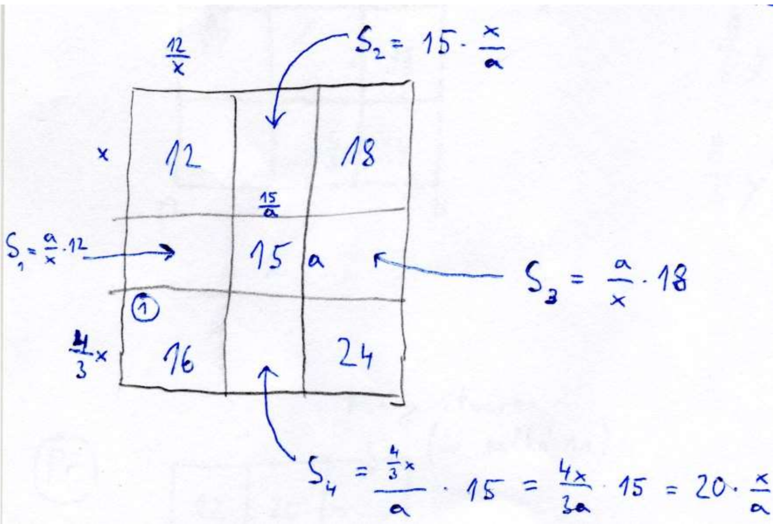
Fáze tvorby
Transformace, formulace a hodnocení. (Mění podmínky úlohy – transformace, identifikuje a testuje možnou otázku – formulace, hodnotí jako příliš snadné – hodnocení.)
</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>
Úvaha
Libor zkouší nakreslit obdélník 3 x 3 pole, náhodně vyplňuje některé obsahy a zkoumá, jestli je možné dopočítat obsahy všech polí.


Obsah jednoho pole („vlevo dole“) jde dopočítat snadno, pro ostatní je opět nekonečně mnoho řešení.

Typ úvahy
Pokus – omyl.

Fáze tvorby
Transformace, formulace a hodnocení.
</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>
Úvaha
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>
Dále Libor propočítává, zda všech nekonečně mnoho možností obsahů podle předchozího obrázku nemá něco společného – např. zkouší, zda obsah celkového obdélníku není konstantní nezávisle na rozdělení obsahu jednotlivých polí. Není.



Typ úvahy

S částečným vědomím následku. Libor hledá invarianty. Vychází ze znalosti situace. Prvek zkoušení v jeho práci je – tipuje, co by mohlo být invariantem. Pracuje ale systematicky, sleduje výpočet a zkoumá i v něm, zda by nešlo něco zajímavého objevit, není to jen náhodný pokus a omyl.

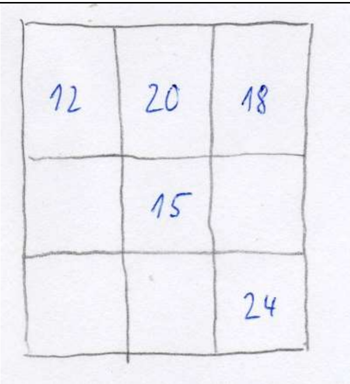
Fáze tvorby

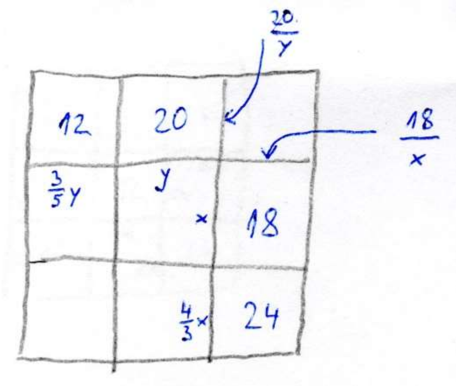
Transformace.

Komentář

Všimněte si, jak Libor situaci důsledně rozebírá. Začátečnický přístup by pravděpodobně vypadal takto: „Má to nekonečně mnoho řešení – není vhodné – kreslím jiný obrázek“. Libor však zkoumá, zda nenajde nějaký invariant, ze kterého by mohl vytvořit zajímavou otázku do úlohy.
</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>
Úvaha

Libor zkouší přidat pátý obsah. Počítá další obsahy.
</td></tr>
</table>

	 Úloha spočítat obsahy všech polí má jednoznačné řešení, Liborovi se líbí, ale ne jako olympiádová, protože je snadná. Komentuje ji však jako vhodnou pro konkurz do Matematického klokana. (Plné znění a řešení úlohy je uvedeno v příloze.) ***Typ úvahy*** Zde se pohybujeme na pomezí úvahy pokus – omyl a úvahy s částečným vědomím následku. Libor přesně ví, že potřebuje zadat obsah pěti polí, aby úloha měla konečný počet řešení. Výběr pole a hodnoty do něj, to je již pokus – omyl. ***Fáze tvorby*** Transformace, formulace, hodnocení.
6.	***Úvaha*** Libor se vrací k zadání pouhých čtyř obsahů, zkouší jiné umístění polí (viz obr. v Úvaze 7). Vychází opět nekonečně mnoho řešení. ***Typ úvahy*** Pokus – omyl. ***Fáze tvorby*** Transformace, formulace.
7.	***Úvaha*** Jako v Úvaze 4 se snaží výpočtem se zavedenými proměnnými hledat invarianty. Opět nenachází.

<table>
<tr><td></td><td>


Typ úvahy

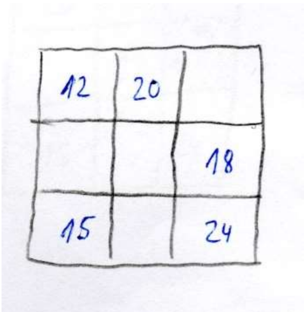
S částečným vědomím následku.

Fáze tvorby

Transformace, formulace.
</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>

Úvaha

Libor zkouší vyplnění obsahu pátého pole (v jiném rozložení než v Úvaze 5).



Úloha vychází podobná jako v Úvaze 5.

Typ úvahy

Pokus – omyl.

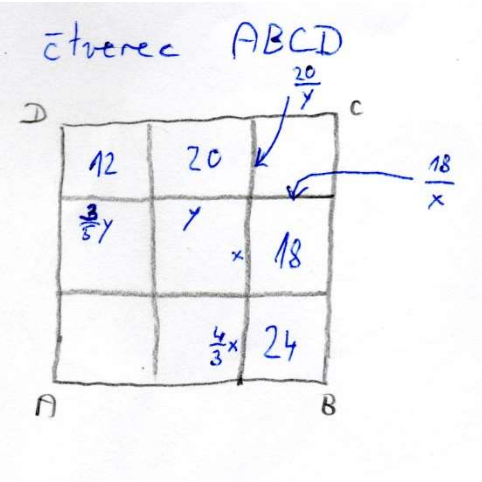
Fáze tvorby

Transformace, formulace a hodnocení.
</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>

Úvaha

Libor sumarizuje, co zjistil. Zadat čtyři obsahy nestačí, zadání pátého obsahu však generuje příliš snadnou úlohu. Odtud plyne, že je potřeba zadat ke čtyřem obsahům ještě nějakou informaci, ovšem ne rovnou obsah. Zkouší tedy přidat podmínku, že
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
celkový útvar je čtverec. Počítá, zda je již možné dopočítat všechny obsahy. Zavádí proměnné, výpočet je však tak složitý, že jej ani nedořešuje – stejně by takovou úlohu nemohl zadat žákům.



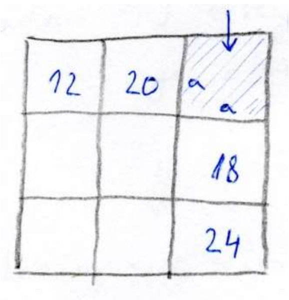
Typ úvahy

S částečným vědomím následku. Přidání informace o čtverci je sice náhodné zkoušení, Libor však přesně ví, jaký typ informace bude do úlohy potřeba.

Fáze tvorby

Transformace, formulace a hodnocení.
</td>
</tr>
<tr>
<td>10.</td>
<td>
Úvaha

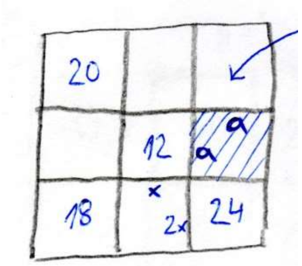
Libor opouští myšlenku „velkého“ čtverce, zadává podmínku, že čtvercem je jedno z polí. Situace má nekonečně mnoho řešení.

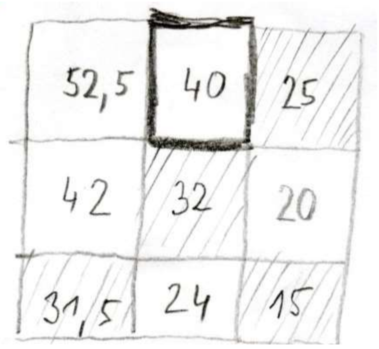


Typ úvahy

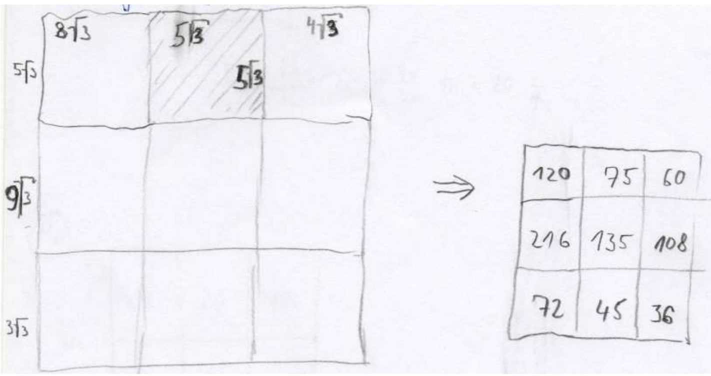
S částečným vědomím následku.

Fáze tvorby
</td>
</tr>
</table>

	Transformace, formulace.
11.	***Úvaha*** Libor zkouší jiné rozmístění.  ***Typ úvahy*** Pokus – omyl. ***Fáze tvorby*** Transformace a formulace. ***Komentář*** Libor v úvodu této úvahy uvádí: *„Nebyl jsem si jistý, zda není nekonečné množství řešení dáno rozmístěním zadaných obsahů. Nechtěl jsem se pouštět do obecných úvah, a raději jsem z pohodlnosti rozmístil zadaná čísla jinak a začal úlohu řešit.“* Již tato věta je ukázkou jeho zkušeností v tvorbě – nespoléhá na zkoušení, je si vědom, že by mohl odvodit obecnou poučku o tom, jaké minimální množství informací a jakého typu je potřeba k tomu, aby byla situace jednoznačná. Takové odvození by však v tomto případě dalo neúměrně velkou práci. Nicméně opravdu se někdy při tvorbě úlohy stane, že autor sám provádí obecná odvození a odvodí obecná tvrzení na úrovni o mnoho vyšší, než je požadovaná úroveň úlohy.
12.	***Úvaha*** Libor zadává současně obě podmínky – jedno vybrané pole je čtvercové a zároveň celý útvar je čtverec. Dopočítává další obsahy. Se situací je spokojen – úloha se mu líbí. Plánuje pouze změnit čísla, protože hodnoty, které vychází, se mu nelíbí – nechce, aby obsahy vycházely jako zlomky. ***Typ úvahy***

	S částečným vědomím následku – obě podmínky už má ozkoušené, jejich spojením doufá v jednoznačné řešení. ***Fáze tvorby*** Transformace, formulace a hodnocení.
13.	***Úvaha*** Libor rozmýšlí, jaká čísla do úlohy zadat. Vychází „odzadu“ – nejdřív vyplní náhodně jeden řádek, poté vypočítá hodnoty v ostatních řádcích tak, aby odpovídaly příslušné poměry. Provádí výpočet navržené úlohy. (Šrafovaná pole by byla zadaná, obtažené pole je čtverec.) Zjišťuje, že nezohlednil podmínku čtverce, úloha nemá řešení.  ***Typ úvahy*** S částečným vědomím následku. Libor zohledňuje většinu vztahů v úloze, ale ne všechny. Úvaha se však již velmi blíží úvaze s plným vědomím následku. ***Fáze tvorby*** Transformace, formulace a hodnocení. ***Komentář*** Všimněte si, jak začíná s hledáním vhodných čísel rovnou systematicky. Začátečník by určitě ještě několikrát vyzkoušel zadat do šrafovaných polí náhodná čísla, než – pokud vůbec – by zkusil promyšlenější práci.
14.	***Úvaha*** Libor opět vychází „odzadu“ – nyní začíná volbou vhodných délek stran obdélníkových polí. Zohledňuje všechny požadavky úlohy – jedno pole je čtvercové, celý útvar je čtverec. Klade si však ještě doplňující podmínky. Chtěl by, aby obsahy

polí byly celočíselné – úloha vypadá lákavěji, příjemněji se počítá. Nechce však, aby celočíselné byly i délky stran polí. Pak by bylo možné výsledky jen uhodnout bez provedení výpočtu. Volí proto všechny hodnoty ve tvaru $k\sqrt{3}$ (k je přirozené číslo). Tyto hodnoty zaručeně nikdo neuhodne, v součinu ale získáme příjemně vypadající přirozená čísla.



Typ úvahy

S plným vědomím následku. Libor má přesně rozmyšlené požadavky. Může to znít paradoxně, ale on vypočítává čísla k zadání. A volí cestu, která nemůže zklamat – čísla získaná výpočtem „odzadu“ nutně musí splňovat všechny požadavky.

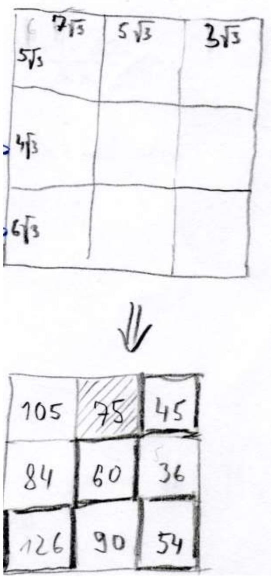
Fáze tvorby

Transformace, formulace.

Komentář

Možná si někdo z čtenářů nezabývajících se matematikou říká, proč se Libor snažil znemožnit odhadnutí správného řešení. Jistě, je pravda, že schopnost odhadu a rychlé orientace v situaci je opravdu žádoucí kompetencí, kterou se snaží rozvíjet i matematika. Nicméně odhady v matematice nemají své místo všude. Korektním vyřešením úkolu má matematik na mysli provedení takového postupu, který odhalí všechna řešení dané situace a vyloučí existencí jiných řešení. Odhadnuté řešení, i kdyby bylo podepřené zkouškou správnosti, korektní není, protože existenci jiných řešení nevyloučilo. Takže paradoxně by byli v úloze zdánlivě úspěšnější slabší žáci, kteří si tuto nutnost neuvědomují. Libor si toto úskalí uvědomuje a podobné situaci předchází, i v tom jsou vidět jeho zkušenosti.

15. ***Úvaha***

	Libor nakonec ještě jednou mění čísla. Na předchozím obrázku se mu nelíbil velký rozdíl mezi obsahem nejmenšího a největšího pole. Plánuje připojit odpovídající obrázek a situace se mu nelíbí z estetického hlediska. Volí hodnoty délek, mezi nimiž jsou menší rozdíly, znovu vypočítává obsahy do zadání.  ***Typ úvahy*** S plným vědomím následku – přidává si další podmínku, vytváří postup, aby zohlednil i ji. ***Fáze tvorby*** Hodnocení, transformace, formulace. ***Komentář*** Opět jsme viděli znak práce zkušeného tvůrce – čísla vygenerovaná v předchozí úvaze bez problému mohla sloužit do hotové úlohy, Libor však ještě zvažuje detaily.
16.	***Úvaha*** Libor nakonec úlohu propočítává, vše kontroluje. Dopracovává přesnou formulaci, překresluje obrázek do počítače. Úlohu hodnotí jako vhodnou do matematické olympiády, cíl tedy splnil. ***Typ úvahy*** Nelze hodnotit, protože se obsahově již nic nevytváří.

Fáze tvorby

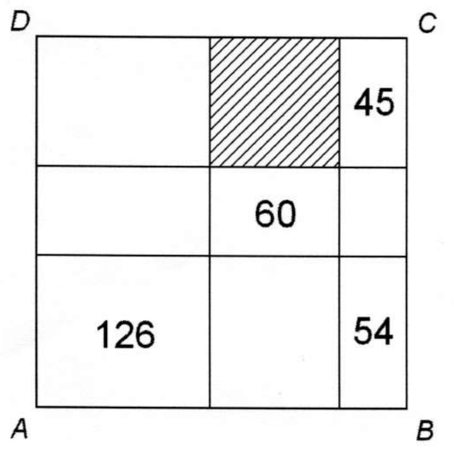
Formulace, závěrečné zhodnocení.

Komentář

Na závěr si všimněme ještě jedné věci – kolik toho Libor sám v průběhu tvorby propočítal. Kolik dílčích úloh rozdílné obtížnosti (od trivialit až po náročné obecné propočty) vlastně sám vyřešil.

Výsledná úloha:

Na obrázku je čtverec *ABCD* rozdělený dvěma rovnoběžnými přímkami a dalšími dvěma přímkami na ně kolmými na devět rovnoběžníků. Ve čtyřech z nich je zapsaný jejich obsah, a to v cm^2. Určete obsahy ostatních pěti rovnoběžníků, víte-li, že vyšrafovaný rovnoběžník je čtverec.



(Řešení úlohy je uvedeno v příloze.)

Závěr

Z výsledků výzkumu vyplynulo, že s rostoucím množstvím zkušeností tvůrce úloh stoupá pravděpodobnost, že se v práci objeví úvaha s plným vědomím následku.

Dalším zjištěním je, že s rostoucím množstvím zkušeností ubývá situací, kdy tvůrce těká mezi nápady a zavrhuje nedostatečně prozkoumané náměty. Druhé zjištění výrazně koresponduje s teorií lineárního a cyklického modelu (Pelczer a Gamboa, 2009), kde rychlé zavržení námětu odpovídá lineárnímu modelu, typickému hlavně pro začátečníky. Prozkoumání tématu s hledáním vhodných transformací odpovídá modelu cyklickému, který je obvyklou trajektorií zkušených tvůrců.

Ukázka Liborovy práce je plně v souladu s předloženými závěry i s citovanou teorií lineárního a cyklického modelu. Libor se mnohokrát vrací, transformuje své předchozí nápady ke stále lepšímu tvaru úlohy. Pracuje tedy cyklicky. V celé jeho práci je patrná jasná vize závěrečné úlohy. Využívá úvahy s plným vědomím následku.

V ukázce jsme viděli způsob, jakým může vzniknout kvalitní matematická úloha. Může samozřejmě vzniknout i jinak. Každá úloha je jiná, každý tvůrce je jiný, každá situace je jiná. Jistěže existují situace, kdy začátečník nad situací hloubá a překvapí propracovaností práce i výslednou úlohou. Stejně tak experti občas pracují zdánlivě začátečnickou trajektorií přímého rozvedení jednoho nápadu – prostě nápad je tak dobrý, že žádné transformace typické pro zkušené tvůrce nejsou potřeba.

Ze zkušeností můžu poradit jednu věc: Chcete-li se věnovat tvorbě úloh, nenechte se odradit neúspěchy – zezačátku to opravdu není lehké. A ještě jedna praktická rada – nezačínejte úplně z nuly – jak ráda říkávám, nad prázdným papírem. Pokud si nad něj nesednete již s nápadem zrajícím ve vaší hlavě, tak to půjde velmi těžko. Situace je příliš otevřená, bez záchytných bodů. A vy pravděpodobně budete těkat od jednoho nápadu ke druhému, ale všude půjdete po povrchu, ne do hloubky. Je potřeba – alespoň pro začátek – si téma nějak konkretizovat. Třeba tak, jako jsme si ukázali u Libora, že vyjdete od existující úlohy a budete se snažit najít její variaci, která s původní úlohou bude mít pramálo společného. Nebo že si třeba řeknete, že chcete vytvořit úlohu na netradiční využití Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku vzniklém nějakým rozdělením rovnoběžníku. Pokud vás práce na tvorbě sama odvede k něčemu jinému, nebraňte se tomu. Pokud ale máte pocit, že nic nevymyslíte a že byste si měli téma změnit, vytrvejte. Ono vás určitě něco napadne. A určitě lepšího, než kdybyste začali těkat od tématu k tématu, a vrátili se tak k situaci prázdného papíru.

Pokud se po přečtení článku pustíte do tvoření úlohy, budu moc ráda. A pokud ne, doufám, že jsme se společně aspoň trochu podívali do „kuchyně“, ve které se připravují nerutinní a náročné matematické úlohy.

Literatura

AKAY, H. – BOZ, N. Prospective Teachers' Views about Problem-Posing Activities. In: *Procedia Social and Behavioral Sciences*. 2009, s. 1192-1198.

PATÁKOVÁ, E. The Quality of Mathematical Problems – Evaluation and Self-evaluation. In: *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science*. Vol. 6(3). 2013, s. 143-154.

PATÁKOVÁ, E. Starters of Problem Posing. In: *Proceedings of the* 11*th International Conference on Efficiency and Responsibility in Education*. Praha: CULS, 2014, s. 548-553.

PELCZER, I. – GAMBOA, F. Problem Posing: Comparison between Experts and Novices. In: *Proceedings of the 18th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4. 2009, s. 353-360.

SHRIKI, A. Working like real mathematicians: Developing prospective teachers` awareness of mathematical creativity through generating new concepts. In: *Educational Studies in Mathematics*. Sv. 73 (2). 2010, s. 159-179.

ZHOUF, J. *Tvorba matematických problémů pro talentované žáky*. Praha: PedF UK. 2010.

PhDr. Eva Semerádová, Ph.D. (rozená Patáková)
eva.semeradova@email.cz

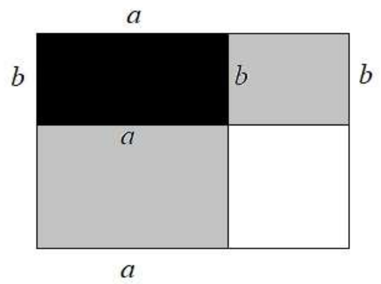
V době psaní článku je na rodičovské dovolené. Před ní působila na Mensa gymnáziu v Praze a na Katedře matematiky a didaktiky matematiky Pedagogické fakulty UK v Praze. Na teoretické i praktické úrovni se zabývá tématy tvorba úloh a práce s matematicky nadanými žáky. Je členkou úlohových komisí a porotkyní několika matematických soutěží s celorepublikovým působením.

Příloha

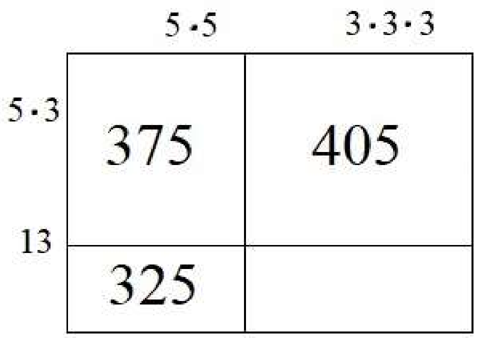
Úloha 1:

Obdélník jsme rozdělili dvěma na sebe kolmými přímkami na čtyři menší obdélníky. Délka každé jejich strany je v centimetrech vyjádřena celým číslem. Obsahy tří z těchto čtyř menších obdélníků jsou 325, 375 a 405 centimetrů čtverečních. Vypočítejte délky stran původního obdélníku.

Řešení:



Na místo obdélníku sousedícího s oběma dalšími zadanými obdélníky musíme vybrat takový, který má délku jedné strany společné s jedním sousedním obdélníkem a délku druhé strany s druhým. Přitom délky stran v součinu musí dávat dané obsahy. Rozklady daných obsahů na součin jsou 325 = 5 · 5 · 13; 375 = 5 · 5 · 5 · 3; 405 = 5 · 3 · 3 · 3 · 3.
Jediná možnost, jak za dodržení všech podmínek rozmístit čísla z rozkladů, je uvedena na následujícím obrázku.



Délky stran obdélníku jsou 5 · 5 + 3 · 3 · 3 = 52 *(cm) a* 5 · 3 + 13 = 28 *(cm).*

Úloha 2:

Obdélník na obrázku je čtyřmi úsečkami rozdělen na devět obdélníků, v pěti z nich jsou napsány jejich obsahy (v centimetrech čtverečních). Určete obsahy zbývajících čtyř obdélníků.

12	20	18
	15	
		24

Řešení:

Označme si obsahy zbývajících obdélníků jako na obrázku:

12	20	18
A	15	B
C	D	24

Pro obdélníky sdílející stejné délky příslušných stran platí např. následující poměry:

$$\frac{12}{A} = \frac{20}{15}$$

$$\frac{20}{15} = \frac{18}{B}$$

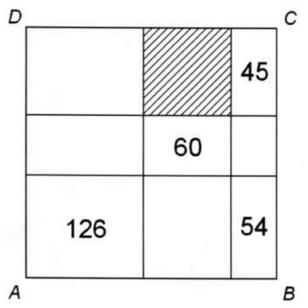
$$\frac{12}{C} = \frac{18}{24}$$

$$\frac{A}{C} = \frac{15}{D}$$

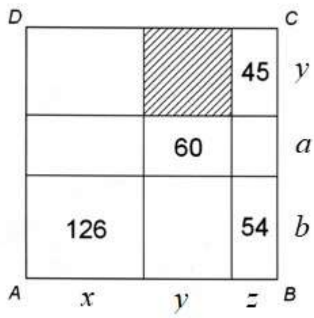
Odtud již snadno dopočítáme, že $A = 9$ cm², $B = \frac{27}{2}$ cm², $C = 16$ cm² *a* $D = \frac{80}{3}$ cm².

Úloha 3:

Na obrázku je čtverec *ABCD* rozdělený dvěma rovnoběžnými přímkami a dalšími dvěma přímkami na ně kolmými na devět rovnoběžníků. Ve čtyřech z nich je zapsaný jejich obsah, a to v cm². Určete obsahy ostatních pěti rovnoběžníků, víte-li, že vyšrafovaný rovnoběžník je čtverec.



Označme si délky jednotlivých úseků stran čtverce jako na obrázku.



Podle podmínek úlohy sestavíme následující rovnice:

1) $x + y + z = a + b + y$, tedy $x + z = a + b$
2) $ax = 126$
3) $az = 54$
4) $by = 60$
5) $zy = 45$

Z rovnic 2) a 3) plyne, že $\frac{126}{x} = \frac{54}{z}$*, po zjednodušení* $x = \frac{7}{3}z$.

Z rovnic 4) a 5) plyne, že $\frac{60}{b} = \frac{45}{z}$*, po zjednodušení* $b = \frac{4}{3}z$.

Dosazením získaných vztahů do rovnice 1) a jejím zjednodušením zjistíme, že $a = 2z$.

Po dosazení do rovnice 3) obdržíme hodnotu $z = 3\sqrt{3}$*, dále postupným dosazováním do rovnic 3), 2), 5) a 4) dojdeme k hodnotám* $a = 6\sqrt{3}, x = 7\sqrt{3}, y = 5\sqrt{3}, b = 4\sqrt{3}$.

Máme již všechny délky stran dílčích obdélníků, můžeme dopočítat jejich obsahy: 105 cm^2, 75 cm^2, 84 cm^2, 36 cm^2 a 90 cm^2.